ÉCOLE POLYTECHNIQUE FILIÈRE MP

CONCOURS D'ADMISSION 2003

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Propriétés asymptotiques des solutions d'une équation différentielle

On désigne par

- E l'espace vectoriel des fonctions complexes continues bornées sur l'intervalle $J = [1, +\infty[$, muni de la norme $f \mapsto \|f\| = \sup\limits_{t \in J} |f(t)|$;
- $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes continus de E, muni de la norme
$$A \mapsto \|A\| = \sup_{\|f\|=1} \|A(f)\| \ ;$$
- I_E l'endomorphisme identité de E ;
- Δ le sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$ formé des couples (t, τ) vérifiant $1 \leqslant t \leqslant \tau$.

Première partie

Dans cette partie on désigne par k une fonction complexe continue bornée sur Δ et on pose $\|k\| = \sup\limits_{(t,\tau)\in\Delta} |k(t, \tau)|$.

1. Vérifier que, pour toute fonction u de E, la fonction $t \mapsto \displaystyle\int_t^\infty k(t, \tau)u(\tau)\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^2}$ est bien définie sur J et appartient à E.

2. Vérifier que, si l'on note $A(u)$ la fonction ainsi définie, on définit un élément A de $\mathcal{L}(E)$; comparer $\|A\|$ et $\|k\|$.

3. Déterminer une constante $K \geqslant 0$ telle que l'on ait, pour tout $n \geqslant 0$ et tout $t \in J$
$$|\big(A^n(u)\big)(t)| \leqslant \frac{K^n \|u\|}{n!\, t^n} \, .$$

4. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} A^n$ est convergente dans $\mathcal{L}(E)$, et calculer le produit $(I_E - A)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} A^n$.

On fixe une fonction u_0 de E et on considère l'équation intégrale

$$u(t) = u_0(t) + \int_t^{\infty} k(t,\tau)u(\tau)\frac{d\tau}{\tau^2} \tag{1}$$

où u est une fonction inconnue dans E.

5. Quel est le nombre de solutions de (1) ?

Deuxième partie

On s'intéresse maintenant à l'équation (1) où l'on prend

$$u_0(t) = e^{\varepsilon it} \quad , \quad k(t,\tau) = \lambda \sin(t-\tau)$$

($\varepsilon \in \{+,-\}, \lambda \in \mathbf{C}$). On note u_ε sa solution.

6. Montrer que u_ε est de classe C^∞.

7. Vérifier que u_ε est solution sur J de l'équation différentielle

$$u''(t) + \left(1 + \frac{\lambda}{t^2}\right)u(t) = 0\,. \tag{2}$$

8. Le couple (u_+, u_-) est-il une base de l'espace vectoriel des solutions de (2) dans E ?

Troisième partie

On se propose d'étudier le comportement asymptotique de la fonction $u = u_+$ lorsque $t \to +\infty$. On dit qu'une fonction f de E admet un *développement asymptotique à l'ordre* $k \geqslant 0$ s'il existe des constantes $\alpha_0, \ldots, \alpha_k$ telles que l'on ait

$$f(t) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \frac{1}{t^j} + O\left(\frac{1}{t^{k+1}}\right)$$

(ce qui signifie que la fonction $t^{k+1}\left(f(t) - \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \frac{1}{t^j}\right)$ est bornée).

On admettra qu'une telle famille $(\alpha_0, \ldots, \alpha_k)$, si elle existe, est unique. On dit qu'une fonction f de E admet un *développement asymptotique à l'ordre* ∞ si elle admet un développement asymptotique à tout ordre k.

9. On se propose ici de construire un développement asymptotique à l'ordre ∞ pour chacune des fonctions

$$\varphi_n(t) = e^{-it}\int_t^{\infty} \sin(t-\tau)\frac{e^{i\tau}}{\tau^{n+2}}d\tau \quad (n \text{ entier } \geqslant 0 \quad , \quad t \in [1,+\infty[)\,,$$

développement asymptotique que l'on écrira

$$\varphi_n(t) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{n,j} \frac{1}{t^{n+j}} + O\left(\frac{1}{t^{n+k+1}}\right) . \tag{3}$$

a) Vérifier que, pour tout entier $m \geqslant 1$, on a $\displaystyle\int_t^{\infty} \frac{e^{i\tau}}{\tau^m} \mathrm{d}\tau = O\left(\frac{1}{t^m}\right)$.

b) Établir, pour tous entiers $n \geqslant 0$, $k \geqslant 1$, la formule

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{(n+1)!} \left[\sum_{j=1}^{k} \frac{(n+j-1)!}{(2i)^j\, t^{n+j}} - \frac{(n+k)!\, e^{-2it}}{(2i)^k} \int_t^{\infty} \frac{e^{2i\tau}}{\tau^{n+k+1}} \mathrm{d}\tau \right] .$$

c) Conclure.

10. On se propose maintenant de construire un développement asymptotique à l'ordre ∞ pour la fonction $e^{-it}u(t)$; on a donc, par définition

$$u(t) = e^{it} + \lambda \int_t^{\infty} \sin(t-\tau) u(\tau) \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^2} . \tag{4}$$

On écrira ce développement asymptotique sous la forme

$$e^{-it}u(t) = \sum_{j=0}^{k} \gamma_j \frac{1}{t^j} + O\left(\frac{1}{t^{k+1}}\right) .$$

a) Vérifier que l'on a

$$e^{-it}u(t) = 1 + O\left(\frac{1}{t}\right) .$$

b) Supposant construits $\gamma_0, \dots, \gamma_n$, écrire γ_{n+1} en fonction de $\gamma_0, \dots, \gamma_n$ et des divers $\alpha_{p,q}$.

c) Vérifier que l'on a

$$\gamma_{n+1} = \frac{1}{2i}\left(n + \frac{\lambda}{n+1}\right) \gamma_n .$$

d) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n x^n$?

* *
*

Polytechnique MP 2003 : Première Composition

Propriétés asymptotiques des solutions d'une équation différentielle

---

Partie I

1. Nommons provisoirement v cette fonction (dans les questions suivantes, c'est $A(u)$) et posons $M = \|k\|\|u\|$.

   v est bien définie sur J: pour t fixé dans J, l'application $\tau \longmapsto k(t,\tau)u(\tau)\frac{1}{\tau^2}$ est définie, continue sur $[t,\infty[$ et la majoration $|k(t,\tau)u(\tau)\frac{1}{\tau^2}| \leq \frac{M}{\tau^2}$ assure son intégrabilité sur cet intervalle.

   v est bornée sur J: $|v(t)| \leq \int_t^\infty M\frac{d\tau}{\tau^2} = \frac{1}{t}M \leq M$.

   v est continue sur J: le changement de variable $\tau = ts$ transforme $v(t)$ en $\int_1^\infty k(t,ts)u(ts)\frac{ds}{ts^2}$; l'application $(t,s) \longmapsto k(t,ts)u(ts)\frac{1}{ts^2}$ est continue sur J^2, majorée en module, indépendamment de $t \in J$, par la fonction $s \longrightarrow M/s^2$, intégrable sur J. Par théorème, ceci assure la continuité de v sur J.

   $$\boxed{v \text{ appartient à } E}$$

2. On vient de voir que $A(u)$ appartient à E et la linéarité de A est évidente.
   La question 1. a aussi établi $|A(u)(t)| \leq M$ pour tout $t \in J$ donc $\|A(u)\| \leq M = \|k\|\|u\|$.
   A étant linéaire, cela établit:

   $$\boxed{A \text{ est continue et } \|A\| \leq \|k\|.}$$

3. Par récurrence sur n: pour $n = 0$, $A^n(u) = u$ et le résultat se réduit à $|u(t)| \leq \|u\|$.
   Pour $n = 1$, il s'écrit $|A(u)(t)| \leq \frac{K\|u\|}{t}$ et a été établi à la question 1. avec $K = \|k\|$.
   Supposant le résultat acquis au rang n avec $K = \|k\|$, il vient:
   $|A^{n+1}(u)(t)| = |\int_t^\infty k(t,\tau)A^n(u)(\tau)\frac{d\tau}{\tau^2}| \leq \int_t^\infty K\frac{K^n\|u\|}{n!\tau^n}\frac{d\tau}{\tau^2} = \frac{K^{n+1}\|u\|}{(n+1)!t^{n+1}}$.
   Le résultat est ainsi établi par récurrence:

   $$\boxed{|A^n(u)(t)| \leq \frac{K^n\|u\|}{n!t^n}.}$$

4. La majoration du 3. montre que $\|A^n(u)\| \leq \frac{K^n\|u\|}{n!}$ et donc aussi $\|A^n\| \leq \frac{K^n}{n!}$. Ceci prouve la convergence de la série $\sum \|A^n\|$ c'est à dire la convergence absolue de $\sum A^n$.
   Or le cours assure que $(E, \| \ \|)$ est un espace complet et que cette complétude entraîne celle de $(\mathcal{L}(E), \| \ \|)$. La convergence absolue obtenue implique donc la convergence de la série $\sum A^n$ dans $\mathcal{L}(E)$.
   On utilise ensuite l'identité$(I_E - A)\sum_{n=0}^{N-1} A^n = I_E - A^N$: lorsque N tend vers l'infini, le premier membre a pour limite $(I_E - A)\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ car la composition des applications linéaires continues est une application

continue de $\mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$; le second membre a pour limite I_E puisque $\|A^N\| \leq \frac{K^N}{N!}$. On obtient donc en passant à la limite:

$$\boxed{(I_E - A) \sum_{n=0}^{\infty} A^n = I_E.}$$

5. L'équation (1) s'écrit $u = u_0 + A(u)$ ou encore $(I_E - A)(u) = u_0$.

   La question 4. a montré $(I_E - A) \sum_{n=0}^{\infty} A^n = I_E$ et on peut établir aussi bien $(\sum_{n=0}^{\infty} A^n)(I_E - A) = I_E$ de sorte que $I_E - A$ est inversible dans $\mathcal{L}(E)$, d'inverse $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$.

   Dès lors:

$$\boxed{\text{l'équation (1) admet dans } E \text{ l'unique solution } u = (I_E - A)^{-1}(u_0) = (\sum_{n=0}^{\infty} A^n)(u_0).}$$

Partie II

6. u_ε est continue car elle est dans E.

   Notons encore un peu u pour u_ε. Si on développe $\sin(t-\tau)$, (1) se réécrit:

   $u(t) = u_0(t) + \lambda \sin t \int_t^{\infty} (\cos\tau) u(\tau) \frac{d\tau}{\tau^2} - \lambda \cos t \int_t^{\infty} (\sin\tau) u(\tau) \frac{d\tau}{\tau^2}$

   (ces intégrales existent).

   Les fonctions intégrées étant continues, le second membre est de classe C^1.

   u est donc de classe C^1 et $u'(t) = u_0'(t) + \lambda \cos t \int_t^{\infty} (\cos\tau) u(\tau) \frac{d\tau}{\tau^2} + \lambda \sin t \int_t^{\infty} (\sin\tau) u(\tau) \frac{d\tau}{\tau^2}$

   (les termes en $\lambda \sin t \cos t \frac{u(t)}{t^2}$ qui apparaissent dans la dérivation s'éliminent).

   Pour les mêmes raisons, u' est de classe C^1, donc u de classe C^2 et:

   $u''(t) = u_0''(t) - \lambda \sin t \int_t^{\infty} (\cos\tau) u(\tau) \frac{d\tau}{\tau^2} + \lambda \cos t \int_t^{\infty} (\sin\tau) u(\tau) \frac{d\tau}{\tau^2} - \lambda \frac{u(t)}{t^2}$.

   Comme $u_0''(t) = -u_0(t)$, on voit réapparaître $u(t)$ au second membre et finalement:

   $u''(t) = -u(t) - \lambda \frac{u(t)}{t^2}$.

   Cette relation montre alors que u est de classe C^{k+2} dès qu'elle est de classe C^k. Puisqu'elle est C^2, elle est donc C^∞:

$$\boxed{u = u_\varepsilon \text{ est de classe } C^\infty.}$$

7. Ce résultat a été établi dans la question précédente:

$$\boxed{u_\varepsilon''(t) + u_\varepsilon(t)(1 + \frac{\lambda}{t^2}) = 0.}$$

8. On a vu en question 5. que $u_\varepsilon = (I_E - A)^{-1}(u_{0,\varepsilon})$ en notant $u_{0,\varepsilon}(t) = e^{\varepsilon i t}$.

   Le couple $(u_{(0,+)}, u_{(0,-)})$ est libre (si $\alpha u_{(0,+)} + \beta u_{(0,-)} = 0$, les valeurs en $t = 0$ et $t = \pi/2$ montrent que $\alpha + \beta$ et $\alpha - \beta$ sont nuls donc aussi α et β). Son image (u_+, u_-) par l'isomorphisme $(I_E - A)^{-1}$ est donc aussi libre dans E.

   Or, on sait que l'espace vectoriel S des solutions de (2) sur J (S *a priori* inclus dans l'espace des fonctions de classe C^2 sur J) est de dimension 2. (u_+, u_-) en est donc une base, de sorte que cet espace S est en fait inclus dans E:

$\boxed{(u_+, u_-) \text{ est donc une base de l'espace vectoriel des solutions de (2) dans } E.}$

Partie III

9. a) Une intégration par parties donne:

$$\int_t^s \frac{e^{i\tau}}{\tau^m} d\tau = \left[\frac{e^{i\tau}}{i\tau^m}\right]_t^s + m\int_t^s \frac{e^{i\tau}}{i\tau^{m+1}} d\tau.$$

Lorsque s tend vers l'infini, le crochet a une limite car $\frac{e^{is}}{is^m}$ tend vers 0; l'intégrale du second membre aussi car la fonction qui y figure est intégrable sur $[t, +\infty[$ $(m+1 \geq 2)$.

On peut donc passer à la limite et écrire:

$$\int_t^\infty \frac{e^{i\tau}}{\tau^m} d\tau = -\frac{e^{it}}{it^m} + m\int_t^\infty \frac{e^{i\tau}}{i\tau^{m+1}} d\tau.$$

On en déduit:

$$|\int_t^\infty \frac{e^{i\tau}}{\tau^m} d\tau| \leq \frac{1}{t^m} + m\int_t^\infty \frac{1}{\tau^{m+1}} d\tau = \frac{2}{t^m}.$$

$$\boxed{\int_t^\infty \frac{e^{i\tau}}{\tau^m} d\tau = O(\frac{1}{t^m}).}$$

b) Dans $\varphi_n(t)$ (qui existe bien, $n \geq 0$ assurant l'intégrabilité de la fonction), on remplace $\sin(t-\tau)$ par $\frac{e^{i(t-\tau)} - e^{-i(t-\tau)}}{2i}$. En simplifiant puis en séparant en deux termes (qui existent bien):

$$\varphi_n(t) = \int_t^\infty \frac{1 - e^{-2i(t-\tau)}}{2i\tau^{n+2}} d\tau = \int_t^\infty \frac{d\tau}{2i\tau^{n+2}} - \int_t^\infty \frac{e^{-2i(t-\tau)}}{2i\tau^{n+2}} d\tau = \frac{1}{2i(n+1)t^{n+1}} - \frac{e^{-2it}}{2i}\int_t^\infty \frac{e^{2i\tau}}{\tau^{n+2}} d\tau.$$

C'est le résultat demandé pour $k = 1$.

On procède ensuite par récurrence sur k. Supposons la formule établie au rang $k \geq 1$, c'est à dire:

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{(n+1)!}\Big[\sum_{j=1}^k \frac{(n+j-1)!}{(2i)^j t^{n+j}} - \frac{(n+k)! e^{-2it}}{(2i)^k}\int_t^\infty \frac{e^{2i\tau}}{\tau^{n+k+1}} d\tau\Big]$$

On effectue sur l'intégrale la même intégration par parties qu'au a. ci-dessus:

$$\int_t^\infty \frac{e^{2i\tau}}{\tau^{n+k+1}} d\tau = -\frac{e^{2it}}{2it^{n+k+1}} + (n+k+1)\int_t^\infty \frac{e^{2i\tau}}{2i\tau^{n+k+2}} d\tau.$$

Cette transformation de la formule au rang k fait alors apparaître la formule demandée au rang $k+1$, le terme intégré donnant le terme d'indice $k+1$ de la somme:

$\boxed{\text{la formule est établie par récurrence}}$

c) Il suffit de réunir les résultats de a. et de b. et de rappeler que e^{-2it} reste borné pour constater que l'on a obtenu la forme (3) désirée pour $\varphi_n(t)$ (le a. vaut aussi bien avec $2i\tau$ qu'avec $i\tau$):

$$\boxed{\varphi_n(t) = \sum_{j=1}^k \alpha_{n,j} \frac{1}{t^{n+j}} + O(\frac{1}{t^{n+k+1}}) \text{ avec } \alpha_{n,j} = \frac{(n+j-1)!}{(2i)^j (n+1)!}}$$

10. a) On sait que $u(t) = e^{it} + A(u)(t)$ (avec les notations de la Partie I) et la question 3. a montré que $A(u)(t) = O(1/t)$. On a donc (e^{-it} est borné):

$$\boxed{e^{-it}u(t) = 1 + O(1/t).}$$

b) Si on suppose le développement obtenu à l'ordre $n \geq 0$ (on vient de l'établir à l'ordre 0), on peut remplacer $u(\tau)$ par ce développement dans l'égalité (4). Il s'en déduit:

$e^{-it}u(t) = 1 + \lambda e^{-it} \int_t^{\infty} \sin(t-\tau)(\sum_{j=0}^{n} \gamma_j \frac{e^{i\tau}}{\tau^{j+2}} + O(\frac{1}{\tau^{n+3}}))d\tau.$

$|\int_t^{\infty} \sin(t-\tau) O(\frac{1}{\tau^{n+3}})d\tau|$ se majore par $\int_t^{\infty} \frac{M'}{\tau^{n+3}}d\tau = \frac{M'}{(n+2)t^{n+2}}$ et c'est donc un $O(\frac{1}{t^{n+2}})$.

On peut alors écrire à l'aide des fonctions φ_j:

$e^{-it}u(t) = 1 + \lambda \sum_{j=0}^{n} \gamma_j \varphi_j(t) + O(\frac{1}{t^{n+2}}).$

En prenant le développement de chaque φ_j à l'ordre $n+1$ donné par la question 9.:

$e^{-it}u(t) = 1 + \lambda \sum_{j=0}^{n} \gamma_j \sum_{l=1}^{n+1-j} \alpha_{j,l} \frac{1}{t^{j+l}} + O(\frac{1}{t^{n+2}}).$

Ceci est donc le développement voulu à l'ordre $n+1$ et γ_{n+1} est le coefficient de $\frac{1}{t^{n+1}}$, c'est à dire:

$$\boxed{\gamma_{n+1} = \lambda \sum_{j=0}^{n} \gamma_j \alpha_{j,n+1-j}.}$$

c) Les coefficients $\alpha_{n,j}$ ont été calculés à la question 9b.: $\alpha_{n,j} = \frac{(n+j-1)!}{(2i)^j (n+1)!}$

En particulier $\alpha_{j,n+1-j} = \frac{n!}{(2i)^{n+1-j}(j+1)!}$.

Pour $n = j = 0$, on obtient $\alpha_{0,1} = \frac{1}{2i}$ et la formule du b. ci-dessus donne alors $\gamma_1 = \lambda \frac{\gamma_0}{2i}$, ce qui est le résultat voulu dans ce cas.

Pour $n \geq 1$, on remarque que: $\alpha_{j,n+1-j} = \frac{n}{2i}\alpha_{j,n-j}$.

En isolant alors dans l'expression de γ_{n+1} le terme d'indice n:

$\gamma_{n+1} = \lambda \gamma_n \alpha_{n,1} + \lambda \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_j \alpha_{j,n+1-j} = \frac{\lambda \gamma_n}{2i(n+1)} + \lambda \frac{n}{2i} \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_j \alpha_{j,n-j}$

Or $\lambda \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_j \alpha_{j,n-j}$ n'est autre que γ_n, de sorte que:

$$\boxed{\gamma_{n+1} = \frac{1}{2i}(n + \frac{\lambda}{n+1})\gamma_n.}$$

d) S'il existe un entier $p \geq 0$ tel que $\lambda = -p(p+1)$, les γ_n sont tous nuls à partir du rang $p+1$ et le rayon de convergence de la série est alors $R = +\infty$.

Sinon, aucun γ_n n'est nul (car $\gamma_0 = 1$) et le rapport $\frac{|\gamma_{n+1}|}{|\gamma_n|} = |\frac{1}{2i}(n + \frac{\lambda}{n+1})|$ tend vers l'infini avec n.
Le rayon de convergence de la série est alors $R = 0$.

$$\boxed{R = +\infty \text{ ou } 0 \text{ selon que } \lambda \text{ est de la forme } -p(p+1) \text{ ou non.}}$$